Funkcija dvije nezavisne promjenjive

Neka je S neprazan podskup prostora $\mathbb{R}^2$ i $T \subseteq \mathbb{R}$. Ako svakoj tački $M(x,y) \in S$ možemo unaprijed po datom pravilu f pridružiti jednu i samo jednu realnu vrijednost $z \in T$, tada kažemo da je data realna f-ja dvije realne promjenjive f iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$ (sa skupa $S \subseteq \mathbb{R}$ u skup $T \subseteq \mathbb{R}$) i pišemo $z = f(x,y)$. Skup S na kojem je određena f-ja f naziva se domen ili definiciono područje f-je f (označavat ćemo ga sa $\mathcal{D}(f)$), a skup $f(A)$ skup vrijednosti f-je f ili kodomen (označavat ćemo ga sa $\mathcal{R}(f)$). Ako za f-ju, zadanu analitički (formulom) nije data oblast njene definisanosti, onda se pod njom podrazumijeva skup svih tačaka $M \in \mathbb{R}^2$ u kojoj f-ja, odnosno njen analitički izraz imaju određenu realnu vrijednost.

(#) Za svaku od sljedećih f-ja, izračunati $f(3,2)$, i odrediti i skicirati domen.

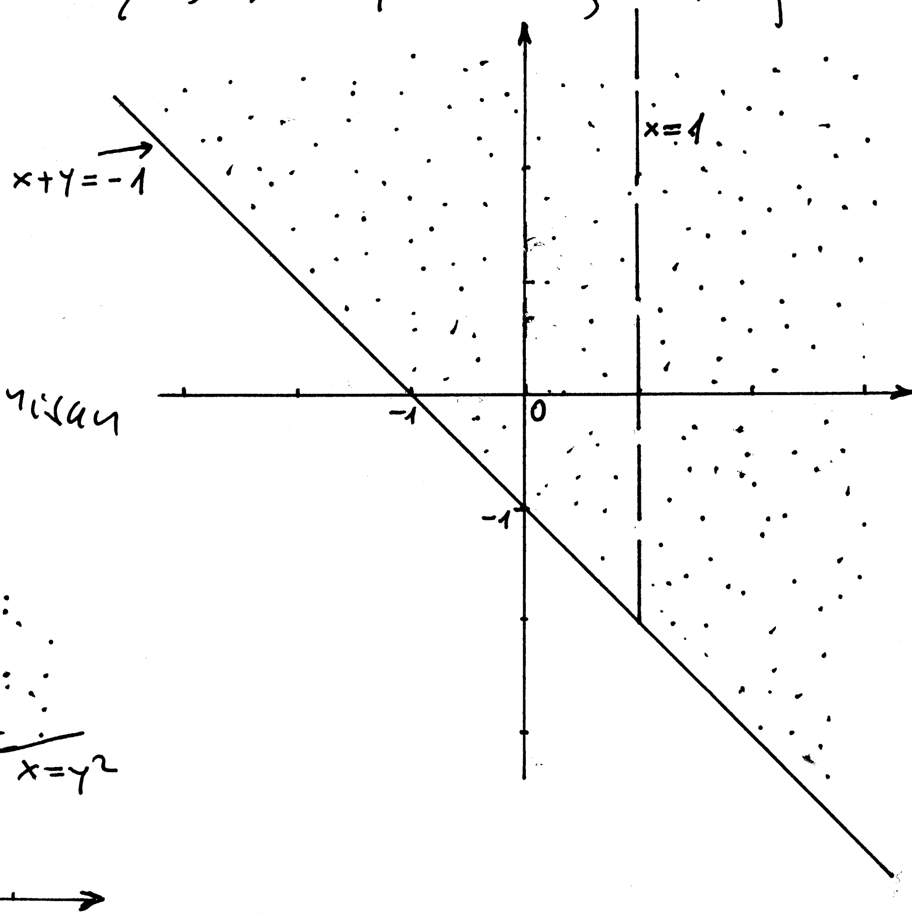
a) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ b) $f(x,y) = x \ln(y^2 - x)$

Rj. a) $f(3,2) = \dfrac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Izraz za f-ju $f(x,y)$ ima smisla ako je nazivnik različit od nule i ako je vrijednost pod korijenom nenegativna:

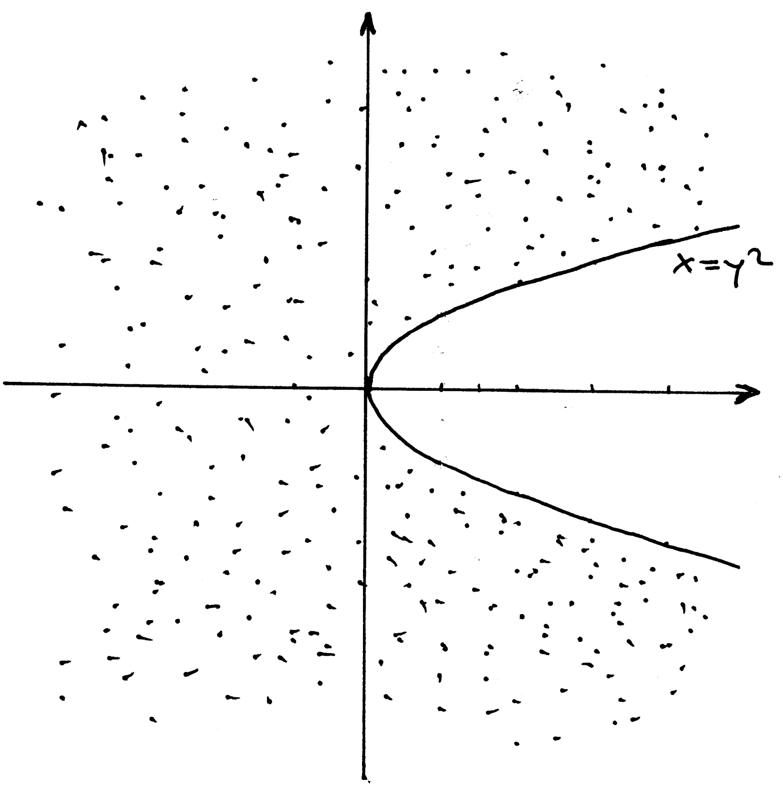
$$\begin{matrix} x-1 \neq 0 \\ x+y+1 \geq 0 \end{matrix} \implies \begin{matrix} x \neq 1 \\ x+y \geq -1 \end{matrix}$$

Domen f-je f je $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq -1,\ x \neq 1\}$



b) $f(3,2) = 3\ln(2^2 - 3)$
$= 3\ln(4-3) = 3\underbrace{\ln 1}_{=0} =$
$= 0$

Izraz $\ln(y^2 - x)$ je definisan samo ako je $y^2 - x > 0$



$D = \{(x,y) \mid x < y^2\}$

Odrediti domen i rang f-je $g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

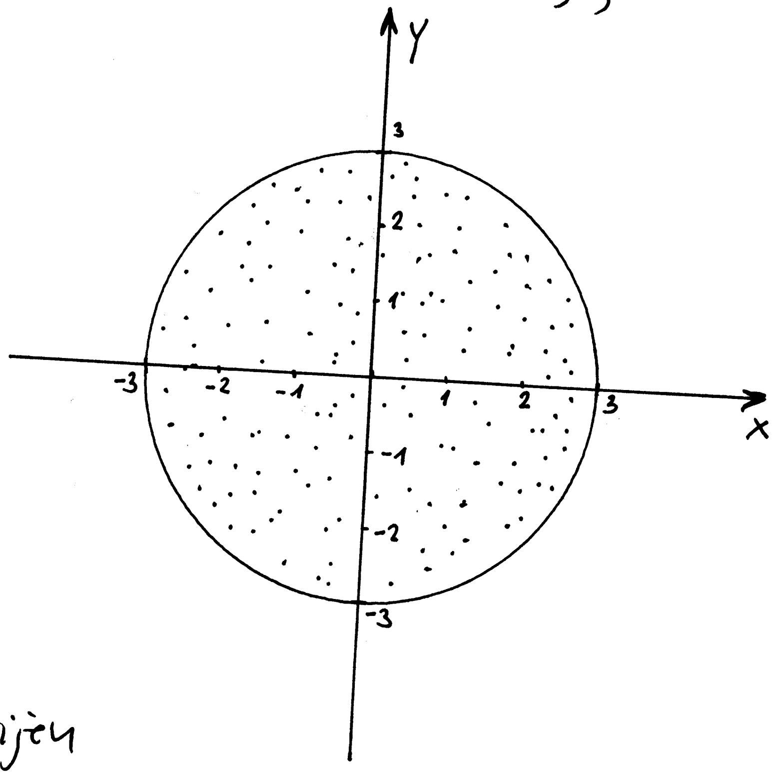
Rj.

F-ja ima smisla akko $9-x^2-y^2 \geq 0$

$$x^2+y^2 \leq 9$$

Domen f-je $g(x,y)$ je $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 9\}$

(znamo da je $x^2+y^2=9$ krug sa centrom u tački $C(0,0)$ poluprečnika $r=3$).



Rang f-je g je

$$\{z\in\mathbb{R} \mid z=\sqrt{9-x^2-y^2},\ (x,y)\in D\}$$

Primjetimo da je

$$9-x^2-y^2\leq 9 \quad \text{za } \forall (x,y)\in D$$

pa je $\sqrt{9-x^2-y^2}\leq 3$

z je pozitivan kvadratni korijen

$$z\geq 0$$

Prema tome, rang f-je $g(x,y)$ je

$$\{z \mid 0\leq z\leq 3\}=[0,3]$$

(#) Skicirati graf f-je $f(x,y) = 6-3x-2y$.

Rj.

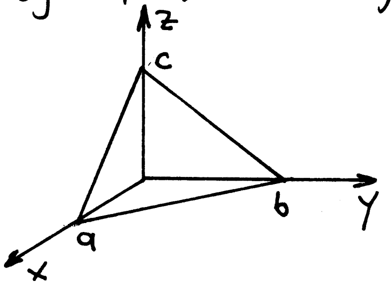
Graf f-je $f(x,y)$ ima jednačinu $z = 6-3x-2y$

$$3x+2y+z=6$$

ovo predstavlja ravan.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

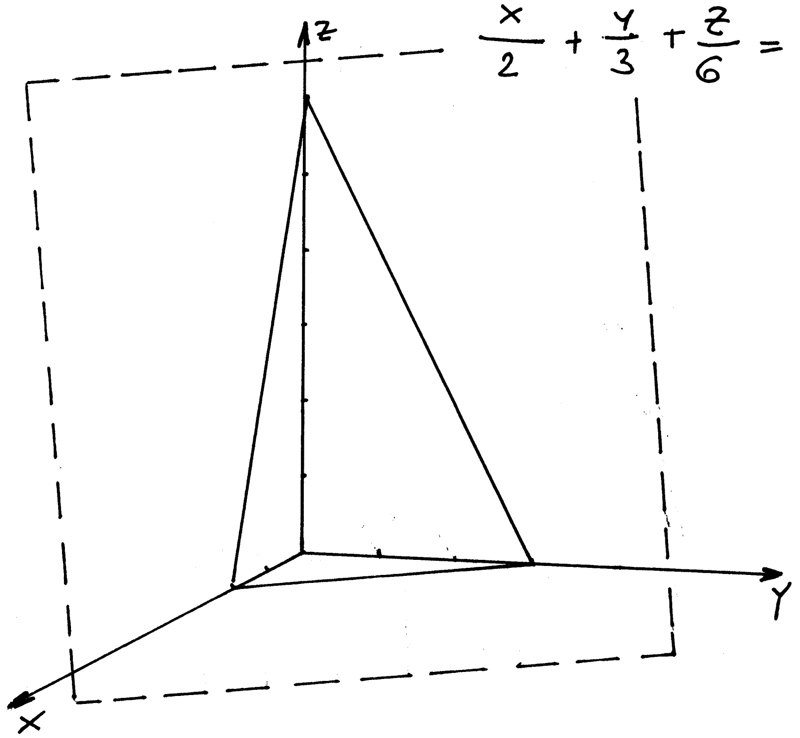
segmentni oblik jednačine ravni



U našem slučaju

$$3x+2y+z=6 \quad /:6$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$$



(#) Skicirati graf f-je $g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

Rj. Graf f-je ima jednačinu $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$

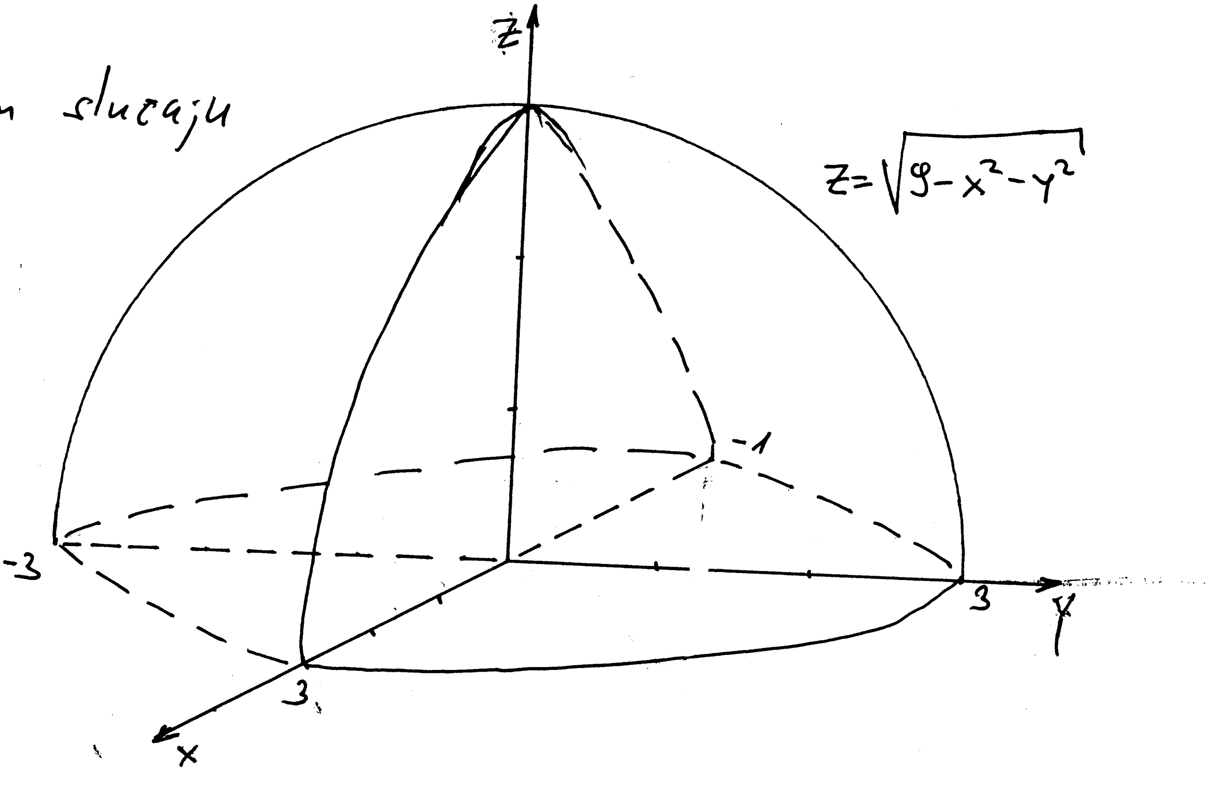
$$z=\sqrt{9-x^2-y^2} \quad /^2$$

$$z^2=9-x^2-y^2$$

$$x^2+y^2+z^2=9$$

$x^2+y^2+z^2=R^2$
je jednačina sfere sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika R

U našem slučaju



Limesi i neprekidnost

<u>Definicija</u> Neka je f f-ja dvije varijable čiji je domen D koji sadrži tačku (a, b) i okolinu tačke (a,b). Tada kažemo da je L limes f-je f(x,y) kad se (x, y) približava (ili teži) tački (a,b) i pišemo

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

ako za svaki realan $\varepsilon > 0$ postoji odgovarajući broj $\delta > 0$ takav da

ako $(x,y)\in D$ i $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ tada $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

<u>Tvrdnja 1</u>

Ako $f(x,y)\to L_1$ kad $(x,y)\to(a,b)$ duž puta C_1 i $f(x,y)\to L_2$ kad $(x,y)\to(a,b)$ duž puta C_2, gdje je $L_1\neq L_2$, tada $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ ne postoji.

(#) Pokazati da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ne postoji.

Rj.
Neka je $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Približavajmo se tački $(0,0)$ duž x-ose. Tada je $y=0$ pa imamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{za } \forall x\neq 0$$

Sada se želimo približavati tački $(0,0)$ duž y-ose. Tj. $x=0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{-y^2}{y^2} = -1 \quad \text{za } \forall y\neq 0$$

Kako limes ima dvije različite vrijednosti duž dvije različite linije dati limes ne postoji.

(#) Ako je $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ da li postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Rj:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} \text{približavajmo se} \\ \text{tački } (0,0) \text{ duž} \\ \text{prave } x=y \end{array} \right| = \lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} \text{približavajmo se} \\ \text{tački } (0,0) \text{ duž} \\ \text{prave } y=0 \\ \text{(duž } x\text{-ose)} \end{array} \right| = \lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = 0$$

Kako smo dobili dvije različite vrijednosti za limes, duž dva različita puta, dati limes ne postoji.

(#) Ako je $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ da li $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ postoji?

Rj.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} \text{približavajmo se} \\ \text{tački } (0,0) \text{ duž} \\ \text{prave } y=mx \\ \text{gdje je } m \text{ koeficijent} \\ \text{pravca} \end{array} \right| = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} f(x,mx) = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{m^2x^3 \quad /:x^2}{x^2+m^4x^4 \quad /:x^2}$$

$$= \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{m^2x}{1+m^4x^2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} \text{približavajmo se} \\ \text{tački } (0,0) \text{ duž} \\ \text{parabole } x=y^2 \end{array} \right| = \lim_{(y^2,y)\to(0,0)} f(y^2,y) = \lim_{(y^2,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{y^4+y^4} =$$

$$= \lim_{y\to0} \frac{y^4}{2y^4} = \lim_{y\to0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Kako dva različita puta vode do dvije različite vrijednosti, dati limes ne postoji.

Tvrdnja 2

Ako dobijemo dvije različite vrijednosti za $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, ako se približavanje tački (a,b) vrši preko različitih nizova tačaka $\left((x_n,y_n)\to(a,b) \text{ kad } n\to\infty \ ; \ (x_n',y_n')\to(a,b) \text{ kad } n\to\infty\right)$ tada $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ ne postoji.

Pokazati da $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$ ne postoji.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} \text{posmatrajmo niz tački} \\ \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0) \text{ kad} \\ n\to\infty \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} \text{posmatrajmo niz tački} \\ \left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0) \text{ kad} \\ n\to\infty \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{\frac{3}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5+n}{n^2}}{\frac{3}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+n}{3n} = \frac{1}{3}$$

Granična vrijednost zavisi od načina približavanja ka tački $(0,0)$ pa limes ne postoji.

Tvrdnja 3

Ako je $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$ za $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ i vrijedi $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = M$ tada je $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = M$.

\# Odrediti $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ ako postoji.

Rj.

$x^2 \leq x^2+y^2$ zato što je $y^2 \geq 0$ pa je

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3|y|x^2}{x^2+y^2} \leq 3|y|$$

$$0 \leq \left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leq 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

kad $(x,y)\to(0,0)$

Prema tome $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$

Posljedica tvrdnje 3

Pretpostavimo da je $|f(x,y) - L| \leq g(x,y)$ za sve (x,y) u unutrašnjosti nekog kruga sa centrom u (x_0,y_0) osim možda u (x_0,y_0). Ako je

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$$

tada $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

(#) Neka je data f-ja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisana na sljedeći način

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Odrediti da li sljedeći limesi postoje i izračunati one limese koji postoje:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]$; $\quad \lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right]$;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Rj. a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

$\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right] = \lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right] = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-y^2}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0}(-1) = -1$

b) Kako je $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right] \neq \lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right]$ to $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne postoji.

(#) Neka je data f-ja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisana na sljedeći način

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Odrediti da li sljedeći limesi postoje i izračunati one limese koji postoje:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]$; $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right]$;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Rj.

a) $$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

b) Pokazaćemo da limes $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne postoji. Posmatrajmo dva niza tački $M_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ i $P_n\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)$, $n=1,2,\ldots$ koje teže $(0,0)$ kad $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^4}{1/n^4+\frac{1}{n^2}} \begin{matrix} / \cdot n^4 \\ / \cdot n^4 \end{matrix} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^2} = 0$$

Prema tome limes zavisi od načina približavanja ka tački $(0,0)$ pa ne postoji.

Neprekidnost

Definicija

Za f-ju f dvije promjenjive kažemo da je neprekidna u tački (a,b) akko

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Kažemo da je f neprekidna na oblasti D ako je neprekidna u svakoj tački $(a,b)\in D$.

\# Izračunati $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

Rj.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2\cdot 2^3 + 1^3\cdot 2^2 + 3\cdot 1 + 2\cdot 2 = 8+4+3+4$$
$$= 19$$

\# U kojim tačkama je f-ja $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ neprekidna?

Rj. Vidimo da f-ja nije definisana (f-ja nema smisla) u tački $(0,0)$ (primjetimo da je $f(0,0) = \frac{0}{0}$).

Prema tome f-ja u tački $(0,0)$ ima prekid.

F-ja je neprekidna na oblasti D gdje je

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\}.$$

(#) Ispitati neprekidnost f-je $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ u tački $(0,0)$.

Rj: F-ja $g(x,y)$ će biti neprekidna u tački $(0,0)$ ako i samo ako je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=g(0,0)$$

tj. akko $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0$.

U jednom od prethodnih zadataka smo pokazali da $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ne postoji.

Prema tome f-ja ima prekid u tački $(0,0)$.

Ispitati neprekidnost f-je $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Rj: F-ja $f(x,y)$ će biti neprekidna u tački $(0,0)$ ako i samo ako je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

tj. akko

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

U jednom od prethodnih zadataka smo pokazali da

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Prema tome f-ja $f(x,y)$ je neprekidna u tački $(0,0)$.

Zadaci za vježbu

§ 2. Početno proučavanje funkcije

Oblast definisanosti

2975. Oblast koja leži unutar paralelograma, obrazovanog pravama: $y=0$, $y=2$, $y=\frac{1}{2}x$, $y=\frac{1}{2}x-1$ prikazati pomoću nejednakosti.

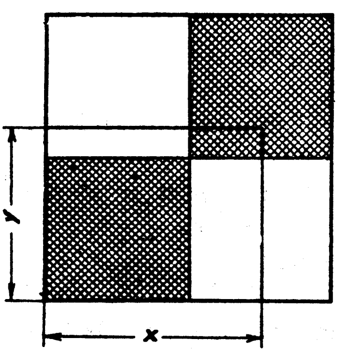
2976. Oblast ograničenu parabolama $y=x^2$ i $x=y^2$ (uključujući granice) definisati nejednakostima.

2977. Opisati pomoću nejednakosti otvorenu oblast, ograničenu jednakostraničnim trouglom stranice a, sa jednim temenom u koordinatnom početku, drugim — na pozitivnom delu x-ose, i trećim — u prvom kvadrantu.

2978. Oblast je ograničena beskonačnim kružnim cilindrom poluprečnika R (isključujući granice), čija je osa paralelna z-osi i prolazi kroz tačku (a, b, c); opisati ovu oblast pomoću nejednakosti.

2979. Oblast ograničenu sferom poluprečnika R sa centrom u tački (a, b, c) (uključujući granicu) definisati pomoću nejednakosti.

2980. Temena pravouglog trougla leže unutar kruga poluprečnika R. Površina S trougla je funkcija njegovih kateta x i y: $S=\varphi(x, y)$: naći: a) oblast definisanosti funkcije φ; b) oblast definisanosti odgovarajućeg analitičkog izraza.



Sl. 57

2981. U loptu poluprečnika R upisana je prava piramida sa pravougaonikom u osnovi. Zapremina V piramide je funkcija osnovnih ivica x i y. Hoće li ova funkcija biti jednoznačno definisana? Sastaviti njoj odgovarajući analitički izraz. i naći oblast definisanosti funkcije i pomenutog analitičkog izraza.

2982. Kvadratna daska se sastoji iz četiri kvadratna polja, dva crna i dva bela kao što je to prikazano na sl. 57; stranica svakog od njih ima dužinu 1. Uočimo pravougaonik čije su stranice x i y paralelne stranicama daske i čiji se jedan ugao poklapa sa njenim crnim uglom. Površina crnog dela ovog pravougaonika biće funkcija od x i y. Naći oblast definisanosti ove funkcije. Izraziti ovu funkciju analitički.

U zadacima 2983—3002 naći oblast definisanosti datih funkcija

2983. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

2984. $z=\ln(y^2-4x+8)$.

2985. $z=\frac{1}{R^2-x^2-y^2}$.

2986. $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

2987. $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

2988. $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$.

2989. $z=\ln xy$.

2990. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

2991. $z=\arcsin\frac{x^2+y^2}{4}+\operatorname{arcsec}(x^2+y^2)$.

2992. $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

2993. $z=\sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

2994. $z=xy+\sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}.$

2995. $z=\operatorname{ctg}\pi(x+y).$

2996. $z=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}.$

2997. $z=\sqrt{x\sin y}.$

2998. $z=\ln x-\ln\sin y.$

2999. $z=\ln[x\ln(y-x)].$

3000. $z=\arcsin[2y(1+x^2)-1].$

3001. $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}.$

3002. $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\quad(R>r).$

Granična vrednost. Neprekidnost funkcije

U zadacima 3003—3008 izračunati granične vrednosti datih funkcija uzimajući da nezavisno promenljive na proizvoljan način teže svojim graničnim vrednostima.

3003. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}.$

3004. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}.$

3005. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}.$

3006. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}.$

3007. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}.$

3008. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}.$

3009. Uveriti se da funkcija $u=\frac{x+y}{x-y}$ kad $x\to0$, $y\to0$ može težiti svakoj graničnoj vrednosti (u zavisnosti od toga kako teže nuli x i y). Navesti primere takvih načina menjanja promenljivih x i y za koje je: 1) $\lim u=1$; 2) $\lim u=2$.

3010. Naći tačke prekida funkcije $z=\frac{2}{x^2+y^2}$. Kako se ponaša funkcija u okolini prekidnih tačaka?

3011. Naći prekidne tačke funkcije $z=\frac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$.

3012. U kojim će tačkama funkcija $z=\frac{1}{x-y}$ biti prekidna?

3013. U kojim će tačkama funkcija $z=\frac{1}{\sin\pi x}+\frac{1}{\sin\pi y}$ biti prekidna?

3014. U kojim će tačkama funkcija $z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$ biti prekidna?

3015*. Ispitati kako stoji sa nepokretnošću datih funkcija za $x=0$, $y=0$:

1) $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$; $f(0,0)=0$.

2) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$; $f(0,0)=0$.

3) $f(x,y)=\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$; $f(0,0)=0$.

4) $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$; $f(0,0)=0$.

5) $f(x,y)=\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$; $f(0,0)=0$.

6) $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$; $f(0,0)=0$.

Rješenja

2975. $0<y<2$; $-1<y-\frac{1}{2}x<0$. **2976.** $x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.

2977. $0<y<x\sqrt{3}$; $y<(a-x)\sqrt{3}$. **2978.** $(x-a)^2+(y-b)^2<R^2$; $-\infty<z<\infty$.

2979. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leqslant R^2$.

2980. a) $x^2+y^2 \leqslant 4R^2$; b) $-\infty<x<\infty$; $-\infty<y<\infty$.

2981. $v=\frac{1}{6}xy\left(2R \pm \sqrt{4R^2-x^2-y^2}\right)$; funkcija nije jednoznačna. Oblast definisanosti funkcije je $x^2+y^2 \leqslant 4R^2$; $x>0$, $y>0$. Oblast definisanosti analitičkog izraza je $x^2+y^2 \leqslant 4R^2$.

2982.

Za $0 \leqslant x \leqslant 1$,	$0 \leqslant y \leqslant 1$	$S=xy$;
za $0 \leqslant x \leqslant 1$,	$1 \leqslant y$	$S=x$;
za $1 \leqslant x$	$0 \leqslant y \leqslant 1$	$S=y$;
za $1 \leqslant x \leqslant 2$,	$1 \leqslant y \leqslant 2$	$S=xy-x-y+2$;
za $1 \leqslant x \leqslant 2$,	$2 \leqslant y$	$S=x$;
za $2 \leqslant x$,	$1 \leqslant y \leqslant 2$	$S=y$;
za $2 \leqslant x$,	$2 \leqslant y$	$S=2$;

funkcija nije definisana za $x<0$ i $y<0$.

2983. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$. **2984.** $y^2>4x-8$.

2985. Sva ravan izuzev tačaka kružne linije $x^2+y^2=R^2$.

2986. Unutrašnjost desnog pravog ugla koji obrazuju simetrale koordinatnih uglova, uključujući i odgovarajuće delove simetrale, tj.

$$x+y \geqslant 0, \quad x-y \geqslant 0.$$

2987. Ista kao i u zad. 2986, samo bez tačaka na granici oblasti.

2988. Unutrašnjost desnog i levog ugla koje obrazuju prave $y=1+x$ i $y=1-x$, uključujući i te prave, ali bez njihove presečne tačke:

$$1-x \leqslant y \leqslant 1+x \quad (x>0),$$

$$1+x \leqslant y \leqslant 1-x \quad (x<0).$$

(za $x=0$ funkcija nije definisana).

2989. Unutrašnjost prvog i trećeg kvadranta.

2990. Zatvorena oblast između pozitivnog dela apscisne ose i parabole $y=x^2$ (isključujući i granicu):

$$x \geqslant 0, \; y \geqslant 0; \; x^2 \geqslant y.$$

2991. Prstenasta oblast između krugova $x^2+y^2=1$ i $x^2+y^2=4$, uključujući i samo krugove: $1 \leqslant x^2+y^2<4$.

2992. Deo ravni koji leži unutar parabole $y^2=4x$, između parabole i kruga $x^2+y^2=1$, uključujući luk parabole izuzev njegovog temena, i isključujući luk kruga.

2993. Deo ravni koji leži izvan krugova čiji su poluprečnici jednaki jedinici a centri su im u tačkama $(-1, 0)$ i $(1, 0)$; tačke prvog kruga pripadaju oblasti, tačke drugog ne pripadaju.

2994. Samo tačke kružne linije $x^2+y^2=R^2$.

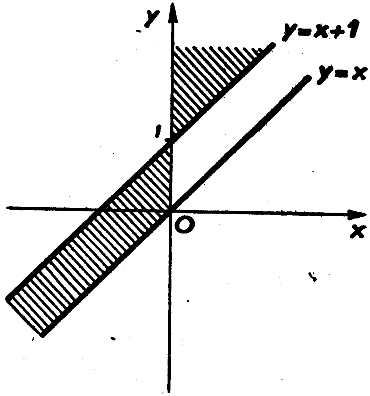
2995. Sva ravan, izuzev pravih $x+y=n$ (n je ma koji ceo broj, pozitivan, negativan ili nula).

2996. Unutrašnjost kruga $x^2+y^2=1$ i prsten $2n \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2n+1$ (n je ceo broj), uključujući i granice.

2997. Ako je $x \geqslant 0$, onda je $2n\pi \leqslant y \leqslant (2n+1)\pi$, ako je $x<0$, onda je $(2n+1)\pi \leqslant y \leqslant (2n+2)\pi$, pri čemu je n ceo broj.

2998. $x>0$; $2n\pi<y<2(n+1)\pi$ (n je ceo broj).

2999. Otvorena šrafirana oblast prikazana na sl. 83: za $x>0$ je $y>x+1$; za $x<0$ je $x<y<x+1$.



Sl. 83

3000. Deo ravni između krive $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ i njene asimptote, uključujući i granicu.

3001. $x>0$, $y>0$, $z>0$.

3002. Deo prostora između sfera $x^2+y^2+z^2=r^2$ i $x^2+y^2+z^2=R^2$, uključujući površinu spoljašnje i isključujući površinu unutrašnje sfere.

3003. 2. **3004.** 0. **3005.** 0.

3006. Funkcija nema granične vrednosti kad $x \to 0$, $y \to 0$.

3007. 0. **3008.** 1.

3009. a) $y=0$ ili $y=x^{\alpha}$ $(\alpha>0)$, $x \to 0$ na bilo kakav način; b) $y=\dfrac{x}{3}$, $x \to 0$ na bilo kakav način.

3010. Tačka (0, 0); u blizini ove tačke funkcija može uzimati koliko se god želi velike pozitivne vrednosti.

3011. Sve tačke sa celobrojnim koordinatama.

3012. Na pravoj $y=x$.

3013. Na pravama $x=m$, $y=n$ (m i n su celi brojevi).

3014. Na paraboli $y^2=2x$.

3015. 1) neprekidna; 2) prekidna; neprekidna posebno po x (tj. pri konstantnom y), i posebno po y (tj. pri konstantnom x); 3) neprekidna; 4) prekidna; 5) prekidna; 6) prekidna. Preći na polarne koordinate.